ЛА	Касарева	14.01.13

Ортогонални матрици и оператори
Изоморфизми на евклидово пространство

$AA^t = A^tA$ - ортогонална матрица
$\varphi: V \to V = (\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v)$

ТВ.
Следните условия са еквивалентни за линейния оператор $\varphi: V \to V$ в евклидово пространство V
(i) φ е ортогонален т.е. $(\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v)$ за $\forall u, v \in V$
(ii) $\varphi(e_i), \varphi(e_j) = (e_i, e_j)$ за $\forall 1 \le i, j \le n$ и произволен базис $e_1 - e_n \in V$
(iii) φ трансформира ортонормиран базис $e_1 - e_n$ на V в ортонормиран базис $\varphi(e_1) - \varphi(e_n)$
(iv) Матрицата A на φ спрямо ортонормиран базис $e_1 - e_n$ на V е ортогонална. В частност, ако $\varphi: V \to V$ е ортогонален линеен оператор в <u>крайномерно</u> евклидово пространство V то φ е линеен изоморфизъм

Док-во
Ясно е че от (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)
Ако $e_1 - e_n$ е ортонормиран базис на V, то матрицата $A = {}^{e}_{e}(\varphi(e_1) - \varphi(e_n))$ на φ спрямо $e_1 - e_n$ се състои по стълбове от координатите на ортонормираната система вектори $\varphi(e_1) - \varphi(e_n)$ спрямо ортонормирания базис $e_1 - e_n$ (условие (iii)), точно когато A е ортогонална матрица (iv)
(iii) $\Rightarrow$ (i) (значение сами от (iv) $\Rightarrow$ (i) или (iii) $\Rightarrow$ (i) няма)
Ако $e_1 - e_n$ и $\varphi(e_1) - \varphi(e_n)$ са ортонормирани системи вектори, то за всяко $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и всяко $v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ имаме $(\varphi(u), \varphi(v)) = (\varphi(\sum x_i e_i), \varphi(\sum y_j e_j)) = (\sum x_i \varphi(e_i), \sum y_j \varphi(e_j))$
$= \varphi(e_1) - \varphi(e_n)$ е ортонормирана $= \sum x_i y_i =$
$= (\sum x_i e_i, \sum y_j e_j) = (u, v)$, защото $e_1 - e_n$ е ортонормирана система. Ако φ е ортогонален оператор, матрицата A на φ спрямо ортонормиран базис е ортогонална, от където и обратната и φ е обратим оператор

Деф.
Изоморфизъм на евклидови пространства $\varphi: U \to V$ е линеен изоморфизъм запазващ скаларните произведения т.е. $(\varphi(u_1), \varphi(u_2)) = (u_1, u_2)$

Тв.
Нека U и V са крайномерни евклидови пространства. В такъв случай, съществува изоморфизъм на евклидовите пространства $\varphi: U \to V \Leftrightarrow$
$$\dim U = \dim V$$

Док-во $\Rightarrow$
Всеки изоморфизъм $\varphi: U \to V$ на евклидови пространства е линеен изоморфизъм откъдето $\dim U = \dim V$

Док-во $\Leftarrow$
Нека $\dim U = \dim V = n$, $u_1 \dots u_n$ е ортонормиран базис на U, $v_1 \dots v_n$ е ортонормиран базис на V. Тогава еднозначно определеното линейно изображение $\varphi: U \to V$ с $\varphi(u_i) = \varphi(v_i)$ за $\forall 1 \le i \le n$ е линеен изоморфизъм. Остава да проверим че $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$ за $\forall a, b \in U$ но-точно за $a = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $b = \sum_{i=1}^{n} y_j e_j$ имаме
$$(\varphi(a), \varphi(b)) = \left(\varphi\left(\sum_i x_i e_i\right), \varphi\left(\sum_j y_j e_j\right)\right) \underset{\substack{v_1 \dots v_n \\ \text{ортон}}}{=} \left(\sum_i x_i v_i, \sum_j y_j v_j\right) = \sum_i x_i y_i =$$
$$= \left(\sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j\right) = (a, b)$$
$u_1 \dots u_n$ ортон
запазва скаларните произведения

Симетрични матрици и оператори

Деф:
Матрицата $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ е симетрична ако $A^t = A \Leftrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$ за $\forall 1 \le i, j \le n$



Свойства на симетричната матрица

1) Ако $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ са симетрични то $A + B$ е симетрична матрица

Док-во
$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$$

2) Ако A е симетрична матрица и $\lambda \in \mathbb{R}$ то λA е симетрична матрица

Док-во

$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$

Следователно множеството Sym_n на симетричните матрици е подпространство на $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$\dim Sym_n = \frac{n(n+1)}{2}$ т.е.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad n + (n-1) + (n-2) \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$

3) Ако $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ е обратима и симетрична то A^{-1} е също симетрична

Док-во

От $AA^{-1} = E_n$ имаме

$(A^{-1})^t A = (A^{-1})^t A^t = (AA^{-1}) = E_n^t = E_n \Rightarrow A^{-1} = (A^{-1})^t$

4) Ако $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ са симетрични матрици и $AB = BA$ то AB е симетрична

Док-во

$(AB)^t = B^t A^t = BA = \boxed{AB}$ – от условие

Деф

Линеен оператор $f: V \to V$ в евклидово пространство V е симетричен ако е изпълнено

$(f(u), v) = (u, f(v))$ за $\forall u, v \in V$

ТВ

Следните условия са еквивалентни за линейния оператор $f: V \to V$ в крайномерно евклидово пространство V:

1) f е симетричен
2) произволен базис $e_1 - e_n$ на V изпълнява условията $(f(e_i), e_j) = (e_i, f(e_j))$ за $\forall 1 \le i, j \le n$
3) произволен ортонормиран базис $e_1 - e_n$ на V изпълнява условията $(f(e_i), e_j) = (e_i, f(e_j))$ за $\forall 1 \le i, j \le n$

4) Матрицата A на ℓ спрямо ортонормиран базис $e_1 - e_n$ на V е симетрична

Док-во

Ясно е че 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) и 3) $\Leftrightarrow$ 4)

Нека $e_1 - e_n$ е ортонормирана база на V. Тогава 3) $(\ell(e_i), e_j) = (e_i, \ell(e_j))$ за $\forall 1 \le i,j \le n$

Ако A е матрицата на ℓ спрямо ортонормирана база $e_1 - e_n$ то $\ell(e_i) = \sum_{s=1}^{n} A_{si} e_s$

$$\ell(e_j) = \sum_{t=1}^{n} A_{tj} e_t \Rightarrow \left(\sum_{s=1}^{n} (A_{sj} e_s, e_j) = \left(e_i, \sum_{t=1}^{n} A_{tj} e_j\right) \Leftrightarrow\right.$$

$A^t = A$ 3) и 4) са еквивалентни

Ако 3) е в сила то е вярно и 1)

Док-во 3) $\Rightarrow$ 1)

Ако $(\ell(e_i), e_j) = (e_i, \ell(e_j))$ за ортонормирана база $e_1 - e_n$ за $\forall u = \sum x_i e_i$, $\forall v = \sum y_j e_j$ имаме

$$(\ell(u), v) = \left(\ell\left(\sum x_i e_i\right), \sum y_j e_j\right) =$$

$$\left(\sum x_i \ell(e_i), \sum y_j e_j\right) \overset{c_2}{=} \sum\sum x_i y_j (\ell(e_i), e_j) \overset{(iii)}{=} \sum\sum x_i y_j (e_i, \ell(e_j)) \overset{c_2}{=}$$

$$\left(\sum x_i e_i, \sum y_j \ell(e_j)\right) = \left(u, \ell\left(\sum y_j e_j\right)\right) = (u, \ell(v))$$

Ортогонална диагонализация на симетрични оператори и матрици

Те

Характеристичните корени на симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V са реални числа

Еквивалентно характеристичните корени на симетрична матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ са реални числа

Док-во

Нека A е симетрична матрица на ℓ спрямо ортонормирана база $e_1 - e_n$ на V. Ако характеристичният полином $f_\ell(\lambda) = f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$ има корен $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, то координатната

менейна система $(A-\lambda_0 E_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O_{n\times 1}$ има
ненулево решение $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ тъй като
$\operatorname{rank}(A-\lambda_0 E_n) \leq n-1$ и $A-\lambda_0 E_n \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$
Следователно $(A-\lambda_0 E_n)c = O_{n\times 1}$ или $Ac-\lambda_0 c = O_{n\times 1}$
$\Rightarrow Ac = \lambda_0 c \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ (1)

Умножаване (1) отляво с $\bar{c}^t = (\bar{c}_1, \bar{c}_2 \dots \bar{c}_n)$ и
получаване (2)

$$\bar{c}^t Ac = \bar{c}^t(\lambda_0 c) = \lambda_0(\bar{c}^t c) = \lambda_0(\bar{c}_1 \dots \bar{c}_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_0\left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2\right)$$

Транспониране на условие (2) дава (3)

$$(\bar{c}^t Ac)^t = c^t A^t \bar{c} \underset{\substack{A^t = A \\ \text{симетр}}}{=} c^t A\bar{c} = \lambda_0\left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2\right)$$

Комплексно спрягане на (2) дава (4)

$$\overline{(\bar{c}^t Ac)} = (\overline{\bar{c}^t})\,\bar{A}\bar{c} = c^t A\bar{c} = \overline{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2\right)$$

почленно изваждане на (3) от (4) дава (5)

$$0 = c^t A\bar{c} - c^t A\bar{c} = \lambda_0\left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2\right) - \overline{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2\right) =$$

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda_0})\left(\sum |c_i|^2\right) = 0 \quad (*)$$

$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c \neq O_{n\times 1} \Rightarrow \sum |c_i|^2 > 0 \Rightarrow (\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) = 0 \Leftrightarrow$
$\lambda_0 = \overline{\lambda_0} \Leftrightarrow \lambda_0 \in \mathbb{R}$

Лема
Ако u и v са собствени вектори на
симетричен оператор $\ell: V \to V$ в евклидово
пространство V относящи се на различни
собствени стойности λ, μ то u и v са
перпендикулярни т.е. $(u, v) = 0$
Док-во

$$\lambda(u,v) = (\lambda u, v) = (\ell(u), v) = (u, \ell(v)) = (u, \mu v) = \mu(u,v)$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu)(u,v) = 0 \text{ за } \lambda - \mu \neq 0 \Rightarrow (u,v) = 0$$

Лема

Ако V е евклидово пространство, $\ell: V \to V$ е симетричен оператор и U е ℓ-инвариантно подпространство, то ортогоналното допълнение на U е ℓ-инвариантно ($U^\perp$ е ℓ-инвариантно)

Док-во

Трябва да проверим че за $\forall v \in U^\perp$ е в сила $\ell(v) \in U^\perp$. Но за $\forall u \in U$ имаме $(u, \ell(v)) = (\ell(u), v) = 0$ защото $\ell(u) \in U$

Теорема за диагонализация

Ако $\ell: V \to V$ е симетричен линеен оператор в крайномерно евклидово пространство V, то съществува ортонормирана база $e_1, \dots, e_n$ от собствени вектори на ℓ, в която матрицата на ℓ е диагонална $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ с/с собствените стойности λ_i на v_i по диагонал

Док-во

С индукция по $n = \dim V$. За $n = 1$ всеки линеен оператор в $\mathbb{R}$ има диагонална матрица $a \in \mathbb{R}$. В общия случай използваме за характеристичните корени на ℓ са реални числа λ_i.

Избираме характеристичен корен $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ на ℓ. Ако $v_1 \in V \setminus \{\vec{0}\}$ е собствен вектор на ℓ отговарящ на собствена стойност λ_1, то $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \in V$ е единичен собствен вектор на ℓ отговарящ на собствената стойност λ_1. Тогава подпространството $U = \ell_{\mathbb{R}}(e_1)$ е едномерно ℓ-инвариантно подпространство и $U^\perp$ е ℓ-инвариантно подпространство на V. От $U \oplus U^\perp = V$ с $\dim V = n$, $\dim U = 1 \Rightarrow U^\perp$ е $(n-1)$ мерно ℓ-инвариантно подпространство на V. По индукционно предположение, симетричният линеен оператор $\ell: U^\perp \to U^\perp$ има ортонормирана база $e_2, \dots, e_n$ от собствени вектори на ℓ, в която $\ell/_{U^\perp}$ има диагонална матрица $D' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Тогава $e_1, e_2 \dots e_n$ е ортонормирана система вектори от V, защото $(e_1, e_i) = 0 \quad 2 \le i \le n$ от $e_1 \in U^\perp = \mathcal{C}(e_1)^\perp$ и $(e_i, e_j) = 0$ за $\forall\ 2 \le i \ne j \le n$. $\|e_s\| = 1$ за $\forall\ 1 \le s \le n$. Съгласно $\dim V = n$, линейно независимата система $e_1 - e_n$ е ортонормиран базис на V. Матрицата ℓ в този базис е

$$D = \begin{matrix} \\ e_1 \\ \\ e_n \end{matrix} \begin{pmatrix} \overset{e_1}{\lambda_1} & & \overset{e_n}{0} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ тъй като $\ell(e_i) = \lambda_i e_i$

Следствие

Ако $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ е симетрична матрица, то съществува ортогонална матрица $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ така че $D = T^{-1}AT = T^tAT$ е диагонална

Док-во

Избираме ортонормиран базис $f_1 \dots f_n$ на евклидово пространство V с $\dim V = n$

Разглеждаме линейният оператор $\ell: V \to V$ с матрица A спрямо базиса $f = (f_1 \dots f_n)$. Понеже A е симетрична и f-ортонормиран, операторът ℓ е симетричен. По теоремата съществува ортонормиран базис $e = (e_1 - e_n)$ на V, в който ℓ има диагонална матрица $D = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ - матрицата на прехода $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ от ортонормираният базис f към ортонормираният базис $e = fT$ е ортогонална. Матрицата на ℓ спрямо базиса e е

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = T^{-1}AT = T^tAT$$